

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$,
 E un K -ev de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

I. Déterminant d'une famille de vecteurs.

Soit $(V_1, \dots, V_n) \in E^n$, tq pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_j = \sum_{i_j=1}^n a_{i_j, j} \cdot e_{i_j}$.

Th 1: L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n -linéaires alternées (1) sur E est un Kev de dimension 1.

Pour tout base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E , on note

$\det_B : E^n \rightarrow K$ l'application définie pour tout $(V_1, \dots, V_n) \in E^n$ par: $\det_B(V_1, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n}$,

où les $a_{i_j, j}$, $i_j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont les composantes de V_j ds B .

Pour toute base B de E , $(\det_B)$ est une base de $\Lambda_n(E)$.

$\forall \varphi \in \Lambda_n(E), \forall S \in E^n, \forall B$ base de $E, \varphi(S) = \varphi(B) \cdot \det_B(S)$.

Def 1: L'élément $\det_B(V_1, \dots, V_n) \in K$ est appelé **déterminant** de $(V_1, \dots, V_n)$ dans la base B .

Prop 1:

$> \forall B, B'$ bases de $E, \forall S \in E^n, \det_{B'}(S) = \det_{B'}(B) \det_B(S)$

$> \forall B, B', B''$ bases de $E, \det_{B'}(B) = \det_{B'}(B') \det_{B''}(B)$

Conséquence: $\forall B, B', \det_B(B') \neq 0$, et $\det_{B'}(B) = \det_B(B')^{-1}$

Prop 2: Soit B base de E .

$(V_1, \dots, V_n)$ liée $\Leftrightarrow \det_B(V_1, \dots, V_n) = 0$

II. Déterminant d'un endomorphisme.

Prop 3: $\forall f \in L(E), \exists ! \alpha \in K$ tq:

$\forall \varphi \in \Lambda_n(E), \forall (V_1, \dots, V_n) \in E^n,$

$\varphi \circ (f \times \dots \times f)(V_1, \dots, V_n) = \varphi(f(V_1), \dots, f(V_n)) = \alpha \varphi(V_1, \dots, V_n)$

En particulier si pour φ on prend le $\det$ dans la base B , on a $\det_B(f(V_1), \dots, f(V_n)) = \alpha \cdot \det_B(V_1, \dots, V_n)$, donc α est indépendant de φ .

Def 2: α est appelé **déterminant de f** et noté $\det(f)$.

Prop 4: $\forall B$ base de $E, \det(f) = \det_B(f(B))$

Prop 5: $\forall \alpha \in K, f, g \in L(E):$

$\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$

$\det(\text{gof}) = \det(g) \cdot \det(f)$

$f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$

III. Déterminant d'une matrice carrée.

Def 3: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. On appelle $\det(A)$:

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n}$

Exemples: déterminant 2/2 ad-bc

dét. d'une matrice triang. haute = Π (élts diagonaux).

Prop 6: B base de $E, f \in L(E), A = \text{Mat}_B(f)$, alors **$\det(A) = \det(f)$** .

Prop 7: $\det({}^t A) = \det(A)$

IV. Calcul du déterminant.

A. Dévelop^t / une ligne ou une colonne.

Def 4: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

1) Le **mineur** de a_{ij} dans A est le déterminant Δ_{ij} obtenu en supprimant la i° ligne et la j° colonne.

2) Le **cofacteur** de a_{ij} dans A est $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Prop 8: Développement par rapport à une rangée.

1) Développement par rapport à la j° colonne:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

2) Développement par rapport à la i° ligne:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Exemple: Cf Monier p.320

B. Remplac^t d'une col. par $C_i \rightarrow C_i + \sum \lambda_j C_j$.

Prop 9: On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes.

On a un résultat analogue sur les lignes.

Prop 10: On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant (simultanément) chaque colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes.

On a un résultat analogue sur les lignes.

Prop 11: On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant (simultanément) chaque colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des précédentes (resp. suivantes).

On a un résultat analogue sur les lignes.

Exemple: Déterminant de Vandermonde.

En appliquant successivement les techniques de CL de colonnes et de développement / 1^o ligne, on a:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

Et $V \neq 0$ ssi les $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

V. Applications.**A. En algèbre.****a) Calcul de l'inverse d'une matrice. (p.322)**

Si $A \in GL_n(K)$, en posant $\text{com}A = (A_{ij})_{ij}$ (Def 4),

$$\text{on a: } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A).$$

b) Calcul du rang. (p.333)

Si $A \in M_n(K)$, alors $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = n$.

Le rang de A est égal à l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

c) Résolution d'un système de Cramer (p.337)

Système de n équations linéaires à n inconnues dont la matrice M est inversible.

$$\text{Les solutions sont données par: } x_i = \frac{\det M_i}{\det M},$$

où M_i est obtenue en remplaçant la i^o colonne de M par le vecteur-colonne des "seconds membres" des équations linéaires.

d) Recherche d'éléments propres. (Alg MP)

Le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$P_A(X) = \det(A - X.I_n).$$

B. En géométrie.**a) Orientation d'un ev $\mathbb{R}$ de dim. finie. (p.331)**

On dit que deux bases B et B' de E sont:

- de même sens ssi $\det_B(B') > 0$

- de sens contraires ssi $\det_B(B') < 0$

d'où une relation d'équivalence "est de même sens que" entre les bases de E, dont le choix d'une des deux classes est appelé **orientation de E**.

b) Matrice de Gram. (Wikipedia+ Gourdon ou Roudier Alg)

En géométrie euclidienne ou hilbertienne, le déterminant de Gram permet de calculer des volumes et de tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Il associe des calculs de produits scalaires et d'un déterminant. Son nom est un hommage au mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).

Soit E un espace préhilbertien réel. Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E, la matrice de Gram associée est la matrice symétrique de terme général $(x_i | x_j)$. Le déterminant de Gram est le déterminant de cette matrice

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) \end{vmatrix}$$

Application au calcul de la distance d'un vecteur par rapport à un sev:

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n de E. Soient $x_1, \dots, x_n$, n vecteurs formant une base de F. Tout vecteur x de E admet un projeté orthogonal p(x) sur F.

$$G(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - p(x)\|^2 \cdot G(x_1, \dots, x_n) \\ = d(x, F)^2 \cdot G(x_1, \dots, x_n)$$

c) Produit mixte. (p.362+Wikipedia)

$[(V_1, \dots, V_n)] = \det_B(V_1, \dots, V_n)$ est indep. du choix de B BOND, et est appelé **produit mixte** de $(V_1, \dots, V_n)$.

En dimension 3, c'est le volume d'un parallélépipède.

On ne l'utilise qu'en dimensions 2 et 3.

En géométrie, le produit mixte est le nom que prend le déterminant dans un cadre euclidien. Sa valeur absolue s'interprète comme le volume d'un paralléloèdre (généralisation du parallélogramme et du parallélépipède à un espace affine (ou vectoriel) réel E de dimension finie n quelconque).

d) En dimension 2.

$$\text{En dimension 2: } \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_B(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

e) Jacobien (leçon 227)

Def: (M4 p.229) Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$ et de fonctions composantes $(f_1, \dots, f_p)$.

On appelle **matrice jacobienne de f en a**, et on note $J_f(a)$, la matrice de df_a relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Def: Avec les hypothèses et notations précédentes, si $n=p$ on appelle (déterminant) **Jacobien de f en a** le déterminant de la matrice Jacobienne de f en a.

(Wikipedia) Si le jacobien est positif au point M, l'orientation de l'espace est conservée au voisinage de ce point. À l'inverse, l'orientation est inversée si le jacobien est négatif. Si l'on considère un « petit » domaine, le volume de l'image de ce domaine par la fonction F sera celui du domaine de départ multiplié par la valeur absolue du jacobien. En mécanique des milieux continus (déformation des solides, écoulement

des fluides), le tenseur des déformations pour les petites déformations (ou tenseur de Green) est la partie symétrique de la matrice jacobienne du vecteur-déplacement de chaque point du solide.

VI. Notes.

En mathématiques, le déterminant fut initialement introduit en algèbre, pour résoudre un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues (Système de Cramer). Il se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines. Il intervient ainsi dans l'étude des endomorphismes, la recherche de leurs valeurs propres, les propriétés d'indépendance linéaire de certaines familles de vecteurs, mais aussi dans le calcul différentiel, par exemple dans la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.

(1) Forme n-linéaire alternée: Une application $f \in L_k(E; F)$ est dite alternée si elle s'annule à chaque fois qu'on l'évalue sur un k-uplet contenant deux vecteurs identiques :

$$[\exists i \neq j, x_i = x_j] \Rightarrow f(x_1, \dots, x_k) = 0$$

De façon équivalente, une application k-linéaire sur E^k est alternée si elle s'annule sur tous les k-uplets liés.

Toute application k-linéaire alternée est antisymétrique.

Si la caractéristique du corps K est différente de 2, la réciproque est vérifiée : toute application k-linéaire antisymétrique est alternée.

VII. Calcul en petites dimensions.

A. Calcul du déterminant en dimension 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

B. Calcul du déterminant en dimension 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ se calcule avec la règle de Sarrus.}$$

Dans la somme qui constitue le déterminant, il y a trois termes "en +" et trois termes "en -".

Termes "en +":

On recopie les deux premières lignes de la matrice en-dessous de celle-ci, et on "prend les diagonales descendantes":

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \searrow & & \\ d & e & f \\ \searrow & & \\ g & h & i \\ \searrow & & \\ a & b & c \\ \searrow & & \\ d & e & f \end{array}$$

Les termes "en +" sont: $+aei + dhc + gbf$

Termes "en -":

On recopie les deux premières lignes de la même manière, et on "prend les diagonales montantes":

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \nearrow & & \\ d & e & f \\ \nearrow & & \\ g & h & i \\ \nearrow & & \\ a & b & c \\ \nearrow & & \\ d & e & f \end{array}$$

Les termes "en -" sont: $-dbi - ahf - gec$

Total:

$$\det = +aei + dhc + gbf - dbi - ahf - gec$$